

**Exercice 1.** Justifier l'existence des intégrales suivantes :

$$M = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} dx \quad ; \quad N = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} dx$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + x + 1)^{-\frac{3}{2}} dx \quad ; \quad L = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx \quad ; \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

**Exercice 2.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = |x \ln x|$ .

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $]0 ; +\infty[$  et est prolongeable par continuité en 0.
2. Calculer alors  $\int_0^2 f(x) dx$ .

**Exercice 3.** On définit la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ .

1. Pour un entier naturel  $n$  non nul, quelle est la nature de l'intégrale  $I_n = \int_n^{+\infty} f(t) dt$  ? Exprimer  $I_n$  en fonction de  $n$ .
2. Donner un équivalent simple de  $I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
3. Donner la nature de la série de terme général  $f(k)$ , où  $k \geq 1$ .
4. Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq I_n \leq \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$$

et en déduire un équivalent de  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 4.** On définit la fonction  $f$  sur  $[2 ; +\infty[$  par  $f(t) = \frac{1}{t \ln^2(t)}$ .

1. Quelle est la nature de l'intégrale  $\int_2^{+\infty} f(t) dt$  ?
2. Etudier les variations de  $f$ .
3. En déduire la nature de la série de terme général  $\frac{1}{k \ln^2(k)}$ , où  $k \geq 2$ .
4. Pour  $b \geq 1$ , que dire de la série de terme général  $\frac{1}{k \ln^b(k)}$ , où  $k \geq 2$  ?

**Exercice 5.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est continue par morceaux sur  $[-1 ; 1]$ .
2. Calculer  $\int_{-1}^1 f(t) dt$ .

**Exercice 6.** Pour un entier naturel non nul  $n$ , on pose  $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$ .

1. Vérifier que  $I_1$  est divergente.
2. Avec une intégration par parties, montrer que, pour  $n \geq 2$ ,  $I_n$  converge et coïncide avec  $\frac{1}{(n-1)^2}$ .

3. Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[2 ; +\infty[$  par  $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2}$ .
4. En déduire, grâce à  $I_2$ , que la série de terme général  $\frac{\ln(k)}{k^2}$ , où  $k \geq 2$ , est convergente.

**Exercice 7.** Soit  $f$  une fonction périodique, de période 1, telle que, pour tout  $x \in [0 ; 1[$ , on a  $f(x) = x$ .

1. Montrer que, pour tout  $x \in [1 ; 2[$ , on a  $f(x) = x - 1$ .
2. Donner l'expression de  $f(x)$  lorsque  $x \in [-1 ; 0[$ .
3. Montrer que  $f$  est continue par morceaux sur  $[-1 ; 2[$ .
4. Calculer  $\int_{-1}^2 f(t) dt$ .

**Exercice 8.** A l'aide du changement de variable  $t = \operatorname{sh}(x)$ , calculer l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} dx$ .

**Exercice 9.** A l'aide du changement de variable  $t = \frac{1}{x}$ , calculer l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + x + 1} dx$ .

**Exercice 10.** A l'aide d'une ipp, calculer l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3} dx$ .